Chap6 Counting

Jin-Hui Wu

2026-04-09

大纲

- 计数基础 (6.1)
- 抽屉原理
- 排列与组合
- 二项式系数与恒等式
- 广义排列与组合

乘法法则

- 乘法法则 (product rule)
  - 一个过程可分解成两个任务，完成第一个任务有n_1种方式，完成第二个任务有n_2种方式，那么完成这个过程有$n_1 n_2$种方式
  - $|A \times B| = |A| \times |B|$

例

- 计算：
  - 不同的7位比特串（0-1串）个数

例

- 计算：
  - 不同的7位比特串（0-1串）个数
  - $|A| = n$，$A \times A$的大小

例

- 计算：
  - 不同的7位比特串（0-1串）个数
  - $|A| = n$，$A \times A$的大小
  - m元集到n元集的函数个数

例

- 计算：
  - 不同的7位比特串（0-1串）个数
  - $|A| = n$，$A \times A$的大小
  - m元集到n元集的函数个数
  - m元集到n元集的单射个数 $(n \geq m)$

加法法则

- 加法法则 (sum rule)
  - 一个任务有两种完成方式，第一种方式有n_1种完成方法，第二种方式有n_2种完成方法，且两种方式没有交集，那么完成这个任务有n_1+n_2种方法

  - 当$A \cap B = \emptyset$时，$|A \cup B| = |A| + |B|$

例

- 计算:
  - 8名学生和2名老师选1位代表的选法

例

- 计算：
  - 8名学生和2名老师选1位代表的选法
  - 由一个小写字母或一个小写字母加一个数字构成的变量名的个数

例

- 计算：
  - 8名学生和2名老师选1位代表的选法
  - 由一个小写字母或一个小写字母加一个数字构成的变量名的个数
  - 6-8位由小写字母和数字构成且至少包含一个数字的密码个数

容斥原理

- 容斥原理 (Inclusion-Exclusion Principle)
  - 一个任务有两种完成方式，第一种方式有n_1种完成方法，第二种方式有n_2种完成方法，那么完成这个任务的方法数为$n_1 + n_2$减去两种方式中相同的方法数
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - 也称减法法则 (subtraction rule)

例

- 计算以1开始或者以00结束的8位比特串个数

例

- 计算以1开始或者以00结束的8位比特串个数

- 350份申请中，220人主修计算机，147人主修商学，51人同时主修计算机和商学，计算既不主修计算机也不主修商学的人数

大纲

- ❑ 计数基础
- ❑ 抽屉原理 (6.2)
- ❑ 排列与组合
- ❑ 二项式系数与恒等式
- ❑ 广义排列与组合

抽屉原理

- 抽屉原理 (pigeonhole principle)
  - 如果$k+1$个或更多的物体放入k个盒子，那么至少有一个盒子包含了 2个或更多的物体
  - 也称为鸽巢原理、鸽笼原理

例

- 在一组367个人中一定至少有2个人有相同的生日

例

- 在一组367个人中一定至少有2个人有相同的生日

- 对每个整数n，存在一个数是n的倍数且在它的十进制表示中只出现0和1

广义抽屉原理

- 广义抽屉原理 (generalized pigeonhole principle)
  - 如果N个物体放入k个盒子，那么至少有一个盒子包含了至少$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$个物体
    - 反证法

例

- 在100个人中至少有____个人生在同一个月

例

- 在100个人中至少有_____个人生在同一个月
- 从一副标准的52张牌中必须选_____张牌才能保证选出的牌中至少有3张是同样的花色

拓展：抽屉原理的应用 (6.2.3)

- 在30天的一个月里，某棒球队至多打45场比赛，且一天至少打一场比赛。证明一定有连续的若干天内这个队恰好打了 14场

拓展：抽屉原理的应用 (6.2.3)

- 在30天的一个月里，某棒球队至多打45场比赛，且一天至少打一场比赛。证明一定有连续的若干天内这个队恰好打了 14场

- 假定一组有6个人，任意两个人或者是朋友或者是敌人。证明在这组人中或存在3个人彼此都是朋友，或存在3个人彼此都是敌人

大纲

- ❑ 计数基础
- ❑ 抽屉原理
- ❑ 排列与组合 (6.3)
- ❑ 二项式系数与恒等式
- ❑ 广义排列与组合

排列

- 排列 (permutation)
  - 集合中不同元素的排列是对这些元素的一种有序安排，对一个集合中r个元素的有序安排称为r排列
  - n个元素的r排列数记作$P(n,r)$
  - S={1,2,3}
    - 3,2是一个2-排列
    - 2-排列有： 1,2 ; 1,3 ; 2,1 ; 2,3 ; 3,1 ; 3,2
    - P(3,2) = 6

排列

- 排列 (permutation)
  - 集合中不同元素的排列是对这些元素的一种有序安排，对一个集合中r个元素的有序安排称为r排列
  - n个不同元素的r排列数为

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)\dots(n-r+1)$$

例

- 8位运动员中的金银铜牌有_____种可能结果

例

- 8位运动员中的金银铜牌有_____种可能结果

- 字母ABCDEFGH有_____种排列包含串ABC

组合

- 组合 (combination)
  - 集合元素的一个r组合是从这个集合无序选取的r个元素，一个r组合是这个集合的一个r个元素的子集
  - n个元素的r组合记作$C(n, r)$或$\binom{n}{r}$
  - S={a,b,c}
    - {a,b} 是一个2-组合
    - 2-组合：{a,b} , {a,c} , {b,c}
    - C(3,2) = 3

组合

- 组合 (combination)
  - 集合元素的一个r组合是从这个集合无序选取的r个元素，一个r组合是这个集合的一个r个元素的子集
  - n个元素的r组合记作$C(n,r)$或$\binom{n}{r}$
  - n元素的r组合数为

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

例

- 从10张扑克牌中选出3张，共有____种不同方法

例

- ❑ 从10张扑克牌中选出3张，共有____种不同方法

- ❑ 数学系有5位教师，计算机系有6位教师，选2位数学系教师和3位计算机教师有____种选法

组合恒等式

- 组合恒等式 (combinatorial identity)
  - $C(n,r) = C(n,n-r)$

大纲

- ❑ 计数基础
- ❑ 抽屉原理
- ❑ 排列与组合
- ❑ 二项式系数与恒等式 (6.4)
- ❑ 广义排列与组合

二项式定理

- 二项式定理 (binomial theorem)
  - x和y是变量，n是非负整数，则

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

  - 例
    - $(2x-3y)^{25}$ 中 $x^{12}y^{13}$ 的系数

组合恒等式

- 组合恒等式 (combinatorial identity)
  - $C(n,r) = C(n,n-r)$
  - $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

组合恒等式

- 组合恒等式 (combinatorial identity)
  - $C(n,r) = C(n,n-r)$
  - $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
  - (帕斯卡恒等式) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

帕斯卡三角

- (帕斯卡恒等式) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8} \\
\cdots
\end{array}
$$

(a)

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}
$$

(b)

大纲

- ❑ 计数基础
- ❑ 抽屉原理
- ❑ 排列与组合
- ❑ 二项式系数与恒等式
- ❑ 广义排列与组合 (6.5)

有重复排列

- 有重复排列 (permutation with repetition)
  - 从n个物体中允许重复地取r个进行排列
  - 不同的顺序对应不同的排列

  - 例
    - 英文大写字母组成的长度为3的字符串有26^3个

  - n个物体的允许重复的r排列数是n^r

有重复组合

- 有重复组合 (combination with repetition)
  - 从n个物体中允许重复地取r个进行组合
  - 组合不考虑物体顺序

例

- 从苹果、橙子、梨中选3个水果，且每种水果有3个，有几种选法

例

- 从1元、2元、5元、10元、20元、50元、100元中选5张纸币，且每种纸币有5张，有几种选法

有重复组合

- 有重复组合 (combination with repetition)
  - 从n个物体中允许重复地取r个进行组合
  - 组合不考虑物体顺序

  - n个元素的集合中允许重复的r组合个数为

$$C(n+r-1,r)$$

例

- 方程$x_1 + x_2 + x_3 = 11$的正整数解的个数

无重/有重排列组合公式

TABLE 1 Combinations and Permutations With and Without Repetition.

Type	*Repetition Allowed?*	*Formula*
r-permutations	No	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinations	No	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r-permutations	Yes	n^r
r-combinations	Yes	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

不可区别物体的排列

- 不可区别物体的排列 (permutation with indistinguishable objects)
  - 例
    - 重新排序SUCCESS中的字母能构成_____个不同的串

不可区别物体的排列

- 不可区别物体的排列 (permutation with indistinguishable objects)
  - 例
    - 重新排序SUCCESS中的字母能构成_____个不同的串
  - 类型1的相同物体有n_1个，…，类型k的物体有n_k个，则$n = n_1 + \cdots + n_k$个物体的排列数为

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

例

- 把52张标准的扑克牌发给4个人使得每个人有5张牌，有____种方式

总结

- 加法法则、乘法法则、容斥原理
- 抽屉原理、广义抽屉原理
- 排列与组合
- 二项式定理
- 有重复排列与组合、不可区别物体的排列